FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1. FUNCIONES LINEALES

Aquéllas cuya fórmula es un polinomio de grado 1.

$$y = 2x + 3$$

Se corresponden con los fenómenos de proporcionalidad; es decir, que la variación de la 'y' sea proporcional a la variación de la 'x'.
En este caso la 'y' varía el doble de la 'x'.
Su gráfica es una recta. Por eso se llaman funciones lineales. Para representarlas basta conocer dos puntos o valores de la misma.
El término independiente me da el valor inicial.
Su expresión, en general, es de la forma:

$$y = m \cdot x + n$$

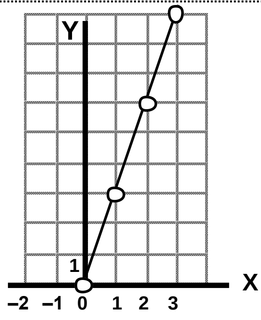
m: pendiente. Nos da una medida de su inclinación. $m>0$ creciente; $m<0$ decreciente. Es la constante de proporcionalidad que existe entre las dos variables.
n: ordenada en el origen. Valor inicial o en el 0. Valor de la 'y' para 'x' = 0
Ejemplos:
$y = -3x + 2$
$y = x$
$y = x - 3$
Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.
Ejemplos:
Dar la fórmula de una recta paralela a $y = 4x - 3$.
De todo lo anterior hacer las tablas de valores y las gráficas y comentar los aspectos de crecimiento y decrecimiento y valor inicial; así como el de paralelismo. Preguntar cuánto vale la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas.

2. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN LINEAL

GRÁFICAS

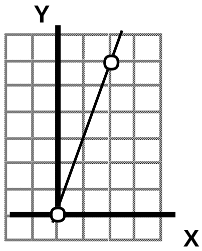
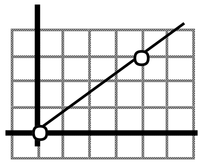
La gráfica de las funciones de proporcionalidad es una **RECTA que pasa por el origen** de coordenadas.

• Distancia recorrida andando a 3 Km/h

Fórmula:	Tabla:		Cálculo:	Gráfica:
	x (h)	y (Km)		
	0	0	$y = 3 \cdot 0 = 0$	
	1	3	y =	
$y = 3 \cdot x$	2	6	y =	
	3	9	y =	
	4	12	y =	

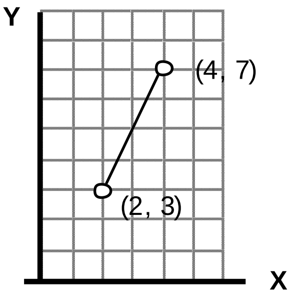
Para **dibujar su gráfica** a partir de la fórmula, basta **obtener un punto** y después trazar la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas.

Por ejemplo, aquí tenermos las gráficas de dos funciones de proporcionalidad:

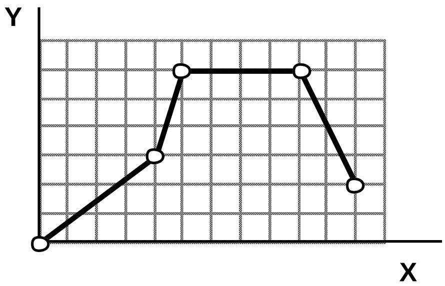
		$y = 3 \cdot x$			$y = \frac{3}{4} \cdot x$
Tabla 1:		Gráfica:	Tabla 2:		Gráfica:
x	y		x	y	
0	0		0	0	
2	6		4	3	

PENDIENTE DE UN SEGMENTO

Para hallar la pendiente o inclinación de un segmento que une dos puntos procederemos así:

Gráfica:	Par de puntos:		Cálculo:
	x	y	$m = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$
	2	3	
	4	7	

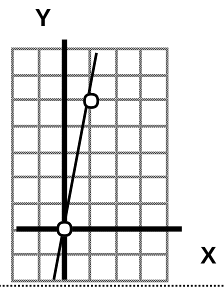
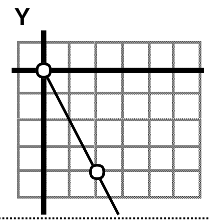
• Halla la pendiente de los diferentes tramos de la gráfica siguiente:



Tramo 1:		Calculo:	Tramo 2:		Cálculo:
x	y				
0	0				
4	3				
Tramo 3:		Cálculo:	Tramo 4:		Cálculo:

PENDIENTE DE UNA RECTA:

Una recta es una gráfica de pendiente constante. Por lo tanto, para hallar la pendiente de una recta se eligen dos puntos cualesquiera y se halla la pendiente del segmento que los une.

Gráfica:	Par de puntos:		Cálculo:
	x 0 1	y 0 5	$m = \frac{5-0}{1-0} = \frac{5}{1} = 5$
	x 0 2	y 0 –4	$m = \frac{-4-0}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

Si la pendiente es POSITIVA la recta es **creciente**
Si la pendiente es NEGATIVA la recta es **decreciente.**
La pendiente de una recta coincide con la constante de proporcionalidad de dicha recta.
Así las fórmulas de la funciones anteriores es fácil deducirlas:

$$y = 5 \cdot x \;;\; y = -2 \cdot x$$

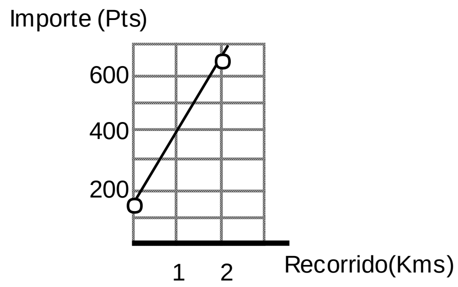
3. RECTAS QUE NO COMIENZAN EN EL ORIGEN

Son las **rectas que no empiezan en el cero.** Es decir, las funciones de proporcionalidad cuyo valor inicial no es cero.

Por ejemplo:
Un taxi cuesta 150 Pts de bajada de bandera más 250 Pts por kilómetro recorrido. Aquí el valor inicial no es 0 sino 150.
La fórmula difiere un poco de las de proporcionalidad.
Aparece un término constante. En este caso es 150:

$$y = 150 + 250 \cdot x$$

Para hacer su gráfica basta hacer una tabla con dos valores (suficientes para dibujar una recta)

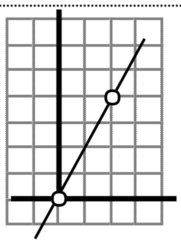
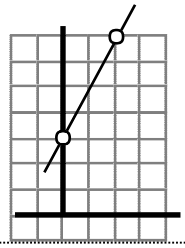
$y = 150 + 250 \cdot x$		Gráfica:
x 0 2	y 150 650	

Estas funciones tienen un elemento más:

$y = n + m \cdot x$ **n**: ordenada en el origen **m**: pendiente

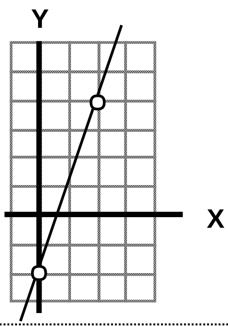
En el caso anterior:
n = y m =

• Para comparar los dos tipos de gráficas:

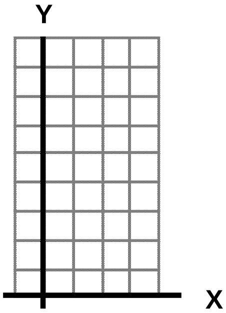
Valor inicial 0			**Valor inicial 3**		
$y = 2 \cdot x$		Gráfica:	$y = 3 + 2 \cdot x$		Gráfica:
x 0 2	y 0 4		x 0 2	y 3 7	
n = 0	m = 2		n = 3	m = 2	

Tienen la misma pendiente pero diferente valor inicial u ordenada en el origen.

• En la gráfica siguiente calcula la ordenada en el origen y la pendiente. Fíjate en los puntos señalados.

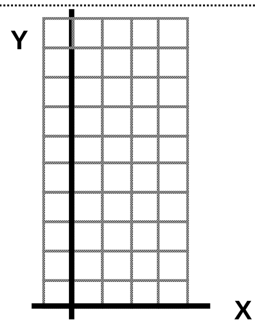
	Cálculos:
Fórmula:	

• Ahora debes hacer lo mismo sabiendo que la tabla de una recta contiene estos dos puntos. Haz la gráfica para ayudarte.

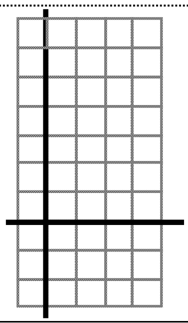
	Gráfica:	Cálculos:
x: 0, 2 — y: 5, 9		
Fórmula:		

FÓRMULA A PARTIR DE LA TABLA SIN VALOR INICIAL

- ¿Cómo obtener la fórmula a partir de una tabla que no contiene el valor inicial?

$y = n + m \cdot x$		Gráfica:	Cálculos:
x **2** 4	y **4** 10		**• Pendiente:** $m = \frac{10-4}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$ Sustituimos en la fórmula: $y = n + 3 \cdot x$ **• Ordenada en el origen:** Sustituimos un valor de la tabla y despejamos n $4 = n + 3 \cdot 2$ —> $n = -2$
$y = -2 + 3 \cdot x$			

- Haz lo mismo con la siguiente tabla:

$y = n + m \cdot x$		Gráfica:	Cálculos:
x 1 4	y –1 5		**• Pendiente:** m = **• Ordenada en el origen:**
			· Fórmula:

A PARTIR DE LA TABLA

Para hallar la fórmula de una función lineal nos bastaría con conocer dos valores o puntos de la función.

Se resuelve por igualación.

Ejemplo: Calcular la fórmula de la recta o función lineal que tiene los siguientes valores o pasa por los siguientes puntos:

x	y
0	1
1	4

x	y
2	4
4	10

A(1, –1) y B(4, 5)

A(1, 2) y B(–1, 6)

A PARTIR DE LA PENDIENTE Y UN PUNTO

Ejemplo:

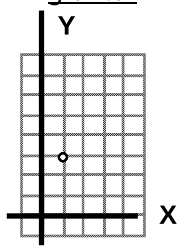
P(5, –2) y m = 4

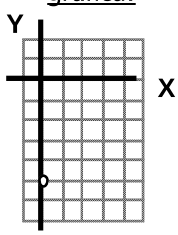
P(–2, 1) y m = 3/4

P(0, 0) y m = 1

3. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Se dice función cuadrática porque su fórmula es de grado 2.

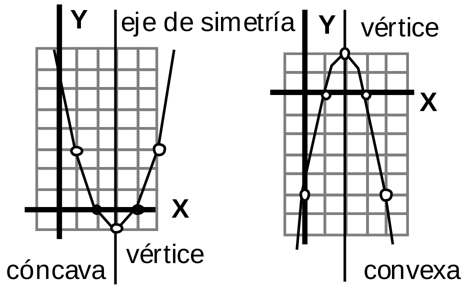
Fórmula:	x	y	cálculo:	gráfica:
$y = x^2 - 6x + 8$	1	3	$y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3$	
	2			
	3			
	4			
	5			

Fórmula:	x	y	cálculo:	gráfica:
$y = -2x^2 + 8x - 6$	0	–6	$y = -2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 6 = -6$	
	1			
	2			
	3			
	4			

• El punto más significativo de una parábola es su vértice. Se trata del punto más bajo o más alto de la curva.

• La parábola es simétrica respecto del eje vertical que pasa por este punto.

• Si el vértice está abajo se dice cóncava la parábola y convexa si está arriba.



• En general, la fórmula de una función cuadrática es del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

• Para representar una parábola lo más importante es calcular su vértice. Esto se consigue con la fórmula siguiente:

$$\text{Vértice: } x = \frac{-b}{2a}$$

Ejercicio.– Dibuja la parábola $y = x^2 - 4x + 3$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

• En la naturaleza nos encontramos con esta curva —la parábola— en numerosas situaciones. Por ejemplo en la trayectoria de un chorro de agua, en la de un proyectil, en el movimiento de algunos astros y en los focos y antenas parabólicas.

4. CORTES CON LOS EJES

Los cortes de una función con los ejes de coordenadas se obtienen para $x = 0$ y para $y = 0$ respectivamente.

FUNCIÓN LINEAL. RECTA

Ejemplos:

Cortes con los ejes de:

$y = 2x + 6$

$y = x - 5$

$$y = \frac{2x + 5}{3}$$

FUNCIÓN CUADRÁTICA. PARÁBOLA

Ejemplos:

$y = x^2 - 6x + 8$

$y = x^2 - 4x + 3$

$y = -2x^2 + 8x - 6$

5. CORTES DE DOS RECTAS. RECTA·PARÁBOLA

RECTAS

Para hallar el punto de corte de dos rectas resolveremos el sistema de ecuaciones que determinan.

Por ejemplo, sean las rectas:

r: $y = 2x + 3$

s: $y = -x + 6$

Obtenemos el punto de corte que resulta ser el (1, 5).

Ejercicio:

Halla el punto de corte de:

$y = -2x + 3$

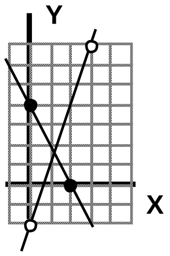
con

$y = x - 6$

POSICIONES RELATIVAS

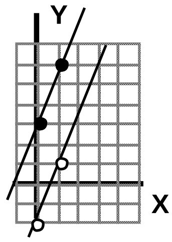
Dos rectas:

<u>Se cortan</u>:
Si sus pendientes son distintas: $m \neq m'$
$y = \mathbf{-2}x + 4$ corta a la recta $y = \mathbf{3}x - 2$



$-2 \neq 3$

<u>Son paralelas</u>:
Si sus pendientes son iguales: $m = m'$
$y = \mathbf{3}x + 3$ es paralela a $y = \mathbf{3}x - 2$



$3 = 3$

RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

• Son rectas horizontales las paralelas al eje X. Su pendiente es 0; es decir, $m = 0$. Y por tanto su ecuación es de la forma: $y = n$	• Son rectas verticales las paralelas al eje Y. Su ecuación es de la forma: $x = a$
$y = 3$	$x = 2$

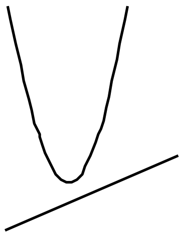
Ejercicio.– Representa las siguientes rectas:

$y = 1$ $\qquad$ $y = -3$ $\qquad$ $x = -2$ $\qquad$ $x = 0$

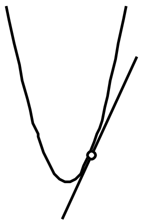
RECTA·PARÁBOLA

Una recta y una parábola tienen tres posiciones relativas, a saber:

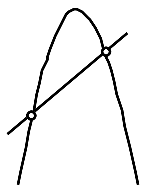
SIN CORTE



TANGENTE. 1 corte



SECANTE. 2 cortes



Para averiguar sus posiciones relativas, conocidas sus ecuaciones, lo haremos resolviendo el sistema de ecuaciones que determinan:

Ecuaciones:
Recta: $y = -2x + 1$
Parábola: $y = x^2 + x - 3$